Vooraf wil ik zeggen dat ik vanaf het grondwerk reageer (mijn leerstoel betreft het reken-wiskundeonderwiis aan 4-14 jarigen), maar dat betekent niet dat mijn vergezicht daarom minder ver is. Het hangt er namelijk maar van af waar je staat.

- Er moet meer geredeneerd worden, binnen de wiskunde, overal. Ik wil dat er meer “waarom” vragen gesteld en beantwoord worden.
- Wat per niveau realistisch is, is een vraag voor de didactici.
- Ik wil dat in ieder geval leraren op de hoogte zijn van axiomatie (verzamelingen, afbeeldingen, getallen) en bewijzen, zoals onderwezen aan de eerstejaars studenten wiskunde aan de universiteiten, en dit in hun onderwijs uitdragen.

Ik wil op drie punten van het betoog van Bas Edixhoven reageren:
- er moet meer geredeneerd worden;
- wat per niveau realistisch is, is een vraag voor didactici;
- en er moet meer axiomatiek in het reken-wiskundeonderwijs.

- Er moet meer geredeneerd worden, binnen de wiskunde, overal. Ik wil dat er meer "waarom" vragen gesteld en beantwoord worden.

HELEMAAL MEE EENS

Helemaal mee eens, als met wiskunde tenminste ook rekenen wordt bedoeld.

En dat ik het hier helemaal mee eens ben, is de belangrijkste reden voor het feit dat ik de uitnodiging om hier een reactie te geven bijna had afgeslagen. Ik ben namelijk bezig met het schrijven van een NWO-PROO aanvraag en morgen om 12:00 is de deadline. Dus ik dacht, ik moet geen twee dingen tegelijk gaan doen. Maar ik heb het toch gedaan.

Het project dat ik ga aanvragen heeft als doel te onderzoeken *of* en *hoe* het reken-wiskundeonderwijs in het basisonderwijs meer wiskundig gemaakt kan worden. Dus meer redeneren in het rekenonderwijs. Vandaar dat ik het hier helemaal mee eens ben.

En voordat iemand gaat zeggen "daar beginnen ze nou pas mee", ik ben hier al 15 jaar geleden mee begonnen
en bovendien dit aandacht geven aan meer wiskundig rekenen speelde ook al in de Wiskobastijd.

- Wat per niveau realistisch is, is een vraag voor de didactici.

???

```
De berekening van de boete is:
(6,5% - 5,0%) x E 160.000 x 5 jaar = bruto E 12.000 en dat contant gemaakt is
E 10.598,14.
```
10.598,21

```
De formule voor de berekening van de boete met contante waarde voor
maandbetaling is:
      (p/q - 1) x h x (1 - 1/(1 + q/1200)^n)
      p = de contractrente
      q = de actuele rente
      h = hypotheekbedrag minus het bedrag dat boetevrij mag worden afgelost
      n = de restant rentevaste periode in maanden
```

Kunt u zo'n formule gebruiken? Helpen de taarten en rechthoeken u?
Begrijpt u deze formule, of bent u aan de bank overgeleverd?

Volgende punt.

* Eigenlijk begrijp ik niet wat hiermee wordt bedoeld.

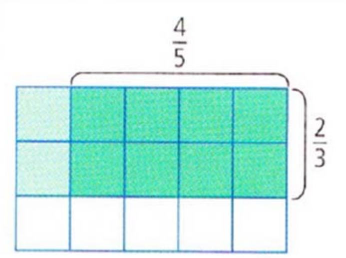
* Maar ik vermoed dat het slaat op de visualiseringen die worden gebruikt om het vermenigvuldigen van breuken en het zetten van haakjes te ondersteunen, en vervolgens zijn die met een voorbeeld over de aflossingsboete bij ING bekritiseerd.

*Over de taal in contextopgaven gesproken: wat wordt er eigenlijk bedoeld met "dat contant gemaakt is"?

Ik heb de formule gebruikt van p/q -1 …
* en toen kwam ik op een paar centen na bij de gegeven boete uit. Dus ik zal de formule wel goed begrepen hebben.
Maar natuurlijk heb ik daar geen taarten en rechthoeken bij gebruikt! Om dat uit te leggen moet ik even een klein uitstapje maken naar de rol van contexten en didactische modellen.

- Welke niveaus realistisch moeten zijn, is een vraag voor didactici

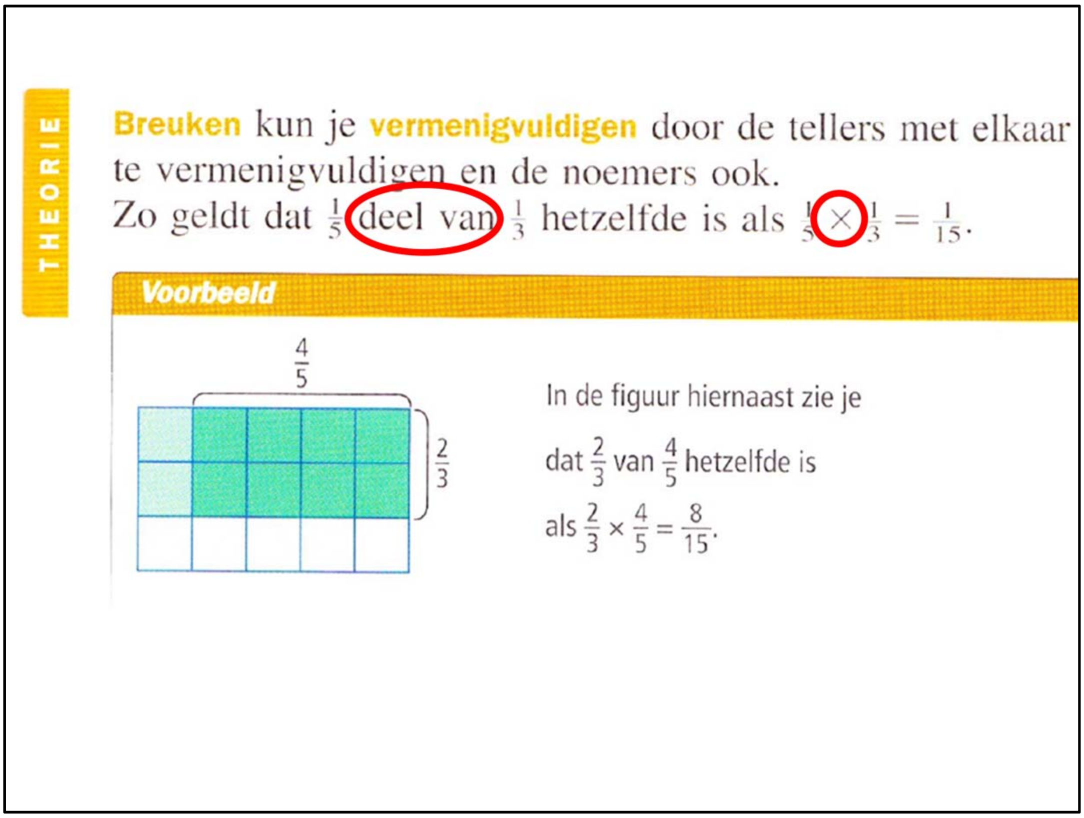
Contexten in Realistisch reken-wiskundeonderwijs
- als bron
- als toepassingsgebied



* Contexten worden in RME op twee manieren gebruikt: als bron (om een bepaald inzicht te ontwikkelen) en als toepassingsgebied.

* Bij het vermenigvuldigen van breuken wordt in deze wiskundemethode, waaruit dit plaatje afkomstig is, dit rechthoeksmodel gebruikt om te laten zien dat 2/3x4/5 =8/15.
Maar eigenlijk heeft deze context een meer fundamentele functie. Dit rechthoeksmodel kan in feite in eerste instantie gebruikt worden om leerlingen te laten begrijpen dat als je vermenigvuldigt met een breuk dat het product dan kleiner wordt en niet groter.
Natuurlijk blijft deze context als die als start gebruikt is, niet altijd meelopen met het hele leerproces. Dus als je zover bent dat je die ING formule aankunt, heb je geen taarten en rechthoeken meer nodig.

* Dus ik zou dit punt liever anders hebben geformuleerd …Welke niveaus (welke fasen in het leerproces) realistisch moeten zijn, is een vraag voor didactici


THEORIE

Breuken kun je **vermenigvuldigen** door de tellers met elkaar te vermenigvuldigen en de noemers ook.
Zo geldt dat $\frac{1}{5}$ deel van $\frac{1}{3}$ hetzelfde is als $\frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$.

Voorbeeld

In de figuur hiernaast zie je dat $\frac{2}{3}$ van $\frac{4}{5}$ hetzelfde is als $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$.

Maar nu we het toch over modellen hebben die het leren van rekenen-wiskunde ondersteunen …

* helpt dit model ook om te begrijpen, dat als je ergens een “deel van” moet nemen, dat je dan moet vermenigvuldigen?
Of moet dit maar als “theorie” verordoneerd worden?
Tja, methodeschrijvers zijn vrij in wat ze in hun methode zetten.

- Ik wil dat in ieder geval leraren op de hoogte zijn van axiomatiek (verzamelingen, afbeeldingen, getallen) en bewijzen, zoals onderwezen aan de eerstejaars studenten wiskunde aan de universiteiten, en dit in hun onderwijs uitdragen.

Voor alle a, b, c, d met $b \neq 0$ en $d \neq 0$ geldt:

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b}+\frac{c}{d} &= a\cdot b^{-1} + c\cdot d^{-1} \\
&= a\cdot 1\cdot b^{-1} + c\cdot 1\cdot d^{-1} \\
&= a\cdot(d\cdot d^{-1})\cdot b^{-1} + c\cdot(b\cdot b^{-1})\cdot d^{-1} \\
&= (a\cdot d)\cdot(b^{-1}\cdot d^{-1}) + (b\cdot c)\cdot(b^{-1}\cdot d^{-1}) \\
&= (a\cdot d + b\cdot c)\cdot(b^{-1}\cdot d^{-1}) \\
&= (a\cdot d + b\cdot c)\cdot(b\cdot d)^{-1} \\
&= \frac{a\cdot d + b\cdot c}{b\cdot d}.
\end{aligned}
$$

Het laatste punt.
“Ik wil dat in ieder geval …”
Op de eerste plaats is het me niet duidelijk op welk schoolniveau deze axiomatiek dan moet worden uitgedragen. Ook al op de basisschool?

* Afgezien van het feit dat ik me afvraag waarom dit optellen van breuken niet met het ‘gewone’ gelijknamig maken mag worden gedaan, doet deze axiomatische benadering me erg denken aan de absurd doorgevoerde abstractheid van New Math. En daar hebben we in de jaren 60 al discussie over gehad.

Ik breng even in herinnering ….

On The Mathematics Curriculum Of The High School

The Mathematics Teacher of March 1962
American Mathematical Monthly of March 1962

- Geen premature introductie van abstracties
- Bij het onderwijzen van wiskunde moet een genetic teaching approach gevolgd worden ipv een puur formele benadering
- De introductie van nieuwe termen en concepten moet voorafgegaan worden door voldoende concrete voorbereiding, gevolgd door genuine, challenging application and not by thin and pointless material

Morris Kline (1973, p. 3)
Why Johnny can't add: the failure of the New Math

One parent asked his eight-year-old child, "How much is 5+3?" The answer he received was that 5+3=3+5 by the commutative law. Flabbergasted, he rephrased the question: "But how many apples are 5 apples and 3 apples? " The child didn't quite understand that "and" means "plus" and so he asked, "Do you mean 5 apples plus 3 apples? " The parent hastened to say yes and waited expectantly. "Oh," said the child, "it doesn't matter whether you are talking about apples, pears or books; 5+3=3+5 in every case."

Lars V. Ahlfors, Harvard University
Harold M. Bacon, Stanford University
Clifford Bell, University of California, Los Angeles
Richard E. Bellman, Rand Corporation
Lipman Bers, New York University
Garrett Birkhoff, Harvard University
R.P. Boas, Northwestern University
Alfred T. Brauer, University of North Carolina
Jack R. Britton, University of Colorado
R.C. Buck,University of Wisconsin
George F. Carrier, Harvard University
Hirsh Cohen, IBM
Richard Courant, New York University
H. S. M. Coxeter, University of Toronto
Dan T. Dawson, Stanford University
Avron Douglis, University of Maryland
Arthur Erdelyi, California Inst. of Technology
Walter Freiberger, Brown University
K. O. Friedrichs, New York University
Paul R. Garabedian, New York University
David Gilbarg, Stanford University
Sydney Goldstein, Harvard University
Herman Goldstine, International Business Machines Corp.
Herbert Greenberg, International Business Machines Corp.
John D. Hancock, Alameda State College
Charles A. Hutchinson, University of Colorado
Mark Kac, Rockefeller Institute
Wilfred Kaplan, University of Michigan
Aubrey 1. Kempner, University of Colorado
Lucien B. Kinney, Stanford University
Morris Kline, New York University
Ignace I. Kolodner, University of New Mexico
Rudolph E. Langer, University of Wisconsin
C. M. Larsen, San Jose State College
Peter D. Lax, New York University
Walter Leighton, Western Reserve University
Norman Levison, Massachusetts Institute of Technology
Hans Lewy, University of California, Berkeley
W. Robert Mann, University of North Carolina
M. H. Martin, University of Maryland
Deane Montgomery, Institute for Advanced Study
Marston Morse, Institute for Advanced Study
Zeev Nehari, Carnegie Institute of Technology
Jerzy Neyman, University of California, Berkeley
Frederick V. Pohle, Adelphi College
H. O. Pollak, Bell Telephone Laboratories
George Pôlya, Stanford University
Hillel Poritsky, General Electric Co.
William Prager, Brown University
Murray H. Protter, University of California, Berkeley
Tibor Rado, Ohio State University
Warwick W. Sawyer, Wesleyan University
Max M. Schiffer, Stanford University
James B. Serrin, University of Minnesota
Lehi T. Smith, Arizona State University
I. S. Sokolnikoff, University of California, Los Angeles
Eli Sternberg, Brown University
J. J. Stoker, New York University
A. H. Taub, University of Illinois
Clifford E. Truesdell, Johns Hopkins University
R. J. Walker, Institute for Defense
Analyses and Cornell University
Wolfgang Wasow, University of Wisconsin
André Weil, Institute for Advanced Study
Alexander Wittenberg, Laval University

... de protestbrief die in 1962 op initiatief van Morris Kline in *The Mathematics Teacher* werd gepubliceerd en die door 75 belangrijke wiskundigen uit de US werd ondertekend.

* * * In deze brief werd grote zorg uitgesproken over de nieuwe lesprogramma's in het voortgezet onderwijs waarin te snel, te veel en te geïsoleerde wiskunde aan de leerlingen werd gepresenteerd, waardoor juist voorbij werd gegaan aan de essentie van de wiskunde: de verbondenheid ervan met de realiteit van het dagelijks leven en de samenhang met andere vakgebieden.

* In het later verschenen *Why Johnny can't add: the failure of the New Math* geeft Morris Kline nog een prachtige karikatuur van waar zo'n ver doorgevoerde abstractheid toe kan leiden.

- **Associativiteit**. Voor alle a, b en c: $(a{\cdot}b){\cdot}c = a{\cdot}(b{\cdot}c)$.
- **Commutativiteit**. Voor alle a, b: $a{\cdot}b = b{\cdot}a$.
- **Eenheids-element**. Voor alle a: $1{\cdot}a = a$.
- **Multiplicatieve inverse**. Voor alle $a \neq 0$ is er een b met $a{\cdot}b = 1$.
- **Distributiviteit**. Voor alle a, b en c: $a{\cdot}(b + c) = (a{\cdot}b) + (a{\cdot}c)$.

Moeten we met de axiomatiek ook het inzicht in de eigenschappen van operaties aan de kant zetten?

NEE

Het is de basis voor
getalinzicht en handig en flexibel rekenen

Tot slot. Moeten we met de axiomatiek ook het inzicht in de eigenschappen van operaties aan de kant zetten?

* NEE, kennis van deze eigenschappen is erg belangrijk.
* Het is de basis voor getalinzicht en handig en flexibel rekenen.

Het is jammer dat we in Nederland geen staatsdidactiek hebben, want anders zou ik het wel weten.