11 WAT KUNNEN WE WEL EN NIET BEREKENEN UIT HET LANGLANDS-PROGRAMMA?

Door de eeuwen heen is vaak gebleken dat zuivere wiskunde, die begint zonder enige toepassing in het achterhoofd, uiteindelijk onontbeerlijk is voor het oplossen van een praktisch probleem. Dat geldt in het bijzonder voor het 'Langlands-programma', een serie vermoedens die wiskundigen wereldwijd de weg wijst naar nooit eerder betreden paden in het vak.

De gereedschapskist van de wiskunde bestaat uit getallen (gehele getallen, breuken, decimale getallen), figuren en ruimtelijke voorwerpen (driehoeken, cirkels, piramiden en bollen) en meer abstracte structuren (relaties en verzamelingen). De klassieke wiskunde bestudeert het 'discrete' en het 'continue' los van elkaar: rekenkunde en algebra gaan over het discrete; meetkunde en analyse bestrijken het continue. Pas sinds het begin van de twintigste eeuw zijn de twee disciplines in de moderne wiskunde met elkaar verweven geraakt.

Typisch voor deze verwevenheid is een serie vermoedens die de Canadese wiskundige Robert Langlands eind jaren zestig formuleerde. Langlands had aanwijzingen, maar geen bewijzen, dat ogenschijnlijk geheel gescheiden takken van de wiskunde diep op de achtergrond toch met elkaar verbonden zijn via symmetrieën aan beide kanten. Zijn serie vermoedens werd het 'Programma van Langlands' genoemd en is tot op heden een wiskundige inspiratiebron. Wiskundigen schatten dat minder dan een procent van het Langlands-programma tot op heden is onderzocht.

Fermat

Het meest spectaculaire resultaat van de toepassing van het Langlands-programma was het bewijs van de laatste stelling van Fermat, dat in 1995 door Andrew Wiles werd gepubliceerd. Na acht jaar eenzaam werk bewees Wiles dat Fermats vermoeden uit 1637 juist was: 'voor n groter dan 2 kan een n-de macht niet als de som van twee andere n-de machten worden geschreven.'

Voor klassieke wiskundigen gaat de stelling van Fermat over getaltheorie. Wiles liet echter zien dat de stelling diep op de achtergrond verbonden is met de meetkunde, en juist die verbondenheid was de sleutel tot het bewijs.

Het Langlands-programma kan op meerdere manieren worden onderzocht. Eén manier kijkt vooral naar welke stellingen eruit volgen: stellingen die zeggen dat één uitdrukking gelijk is aan een andere. Wiskundigen noemen dit de 'existentiële' benadering.

De 'expliciete' benadering daarentegen draait vooral om de vraag wat je, gegeven de stellingen uit de existentiële benadering, kunt berekenen. Lang niet alle objecten in wiskundige stellingen en formules laten zich namelijk berekenen. En zelfs al zijn ze in principe door computerprogramma's berekenbaar, dan nog kan het zijn dat de computer-rekentijd in de praktijk volstrekt uit de hand loopt.

De laatste decennia hebben Nederlandse wiskundigen een sterke traditie opgebouwd in deze expliciete benadering van het Langlands-programma.

De opkomst van de computer heeft de interesse voor de expliciete Langlands-aanpak sterk aangewakkerd. Computers kunnen namelijk wiskundige uitdrukkingen berekenen die voordien onberekenbaar waren. Op die manier heeft de computer nieuwe wegen in de zuivere wiskunde geopend.

De nieuwe wegen blijken soms te leiden tot onverwachte praktische toepassingen. Zo heeft de expliciete benadering van het Langlands-programma gevolgen gehad voor het versleutelen van informatie (cryptografie) en voor de analyse van complexe interferentiepatronen in natuurkundige experimenten. En als inspiratiebron is het 'Programma van Langlands' nog lang niet uitgeput.